

## ВЛИЯНИЕ СКВАЖИН И ГАЛЕРЕЙ НА ПОТОК ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Р.С. Кузьмин, Э.В. Скворцов

*Казанский государственный университет  
Eduard.Scvortsov@ksu.ru*

Интерес к задачам, связанным с воздействием на естественный поток подземных вод закачкой или откачкой жидкости через скважины, не ослабевает (см. [1-4]). Это продиктовано актуальностью практических проблем защиты подземных вод от загрязнений. Одним из подходов к решению таких проблем является создание в потоке загрязненных вод искусственных гидродинамических барьеров, препятствующих продвижению загрязнений [4].

Наряду с численным моделированием при решении подобных задач полезны и аналитические исследования, позволяющие в случае ряда модельных ситуаций провести достаточно полный анализ течения и выявить его особенности. При этом целесообразно доводить результаты до возможно более простого вида, чтобы они могли быть использованы и в качестве тестов. Ниже имеется в виду именно такой подход к решению задач. Наряду с моделированием воздействия на поток батарей скважин изучается и работа в потоке дренажных галерей.

Считается, что скважины и галереи расположены в однородном и изотропном пласте единичной мощности, где имеется естественный поток загрязненных подземных вод, жидкость несжимаема, справедлив закон Дарси, фильтрация двумерна, поток потенциален. Скважины имитируются точечными источниками.

**Три источника в потоке.** Пусть на прямой, перпендикулярной направлению скорости  $v$  потока, имеется три источника расхода  $q$ , каждый на расстоянии  $L$  один от другого, причем второй из них расположен в начале координат  $x, y$ . Комплексный потенциал течения ( $z=x+iy$ ) имеет вид

$$W(z)=-vz-q/(2\pi)\ln[z(z^2+L^2)]. \quad (1)$$

Используем обозначения  $Q=q/(2\pi vL)$ ,  $z'=z/L$ ,  $W(z)/(vL)=\Phi+i\Psi$ , а штрих над  $z$  опускаем. Пусть  $Q^*$  - критическое значение расхода, при котором точка нулевой скорости, расположенная в области течения от источников, оказывается на границе этой области. Течение может осуществляться по двум схемам.

**Схема 1.** Пусть  $Q \geq Q^*$ . Тогда поток от источников имеет единую границу  $\Gamma$ , отделяющую его от набегающего потока, что тем самым создает гидродинамический барьер для загрязнений. Уравнение границы  $\Gamma$  имеет вид  $\Psi=3\pi Q$ . Связь между  $x$  и  $y$  на  $\Gamma$ , вытекающая из него и формулы (1), является алгебраическим уравнением третьей степени

$$x^3 + 3y \operatorname{ctg}(y/Q) x^2 + (1-3y) x + y(1-y^2) \operatorname{ctg}(y/Q) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) при фиксированном  $y$  в диапазоне  $0 \leq y < 3\pi Q$  может иметь три действительных корня, так как соответствует также другим линиям тока, на которых значение функции тока кратно величине  $\pi Q$ . Их построение здесь интереса не представляет. Определив по заданному  $y$  соответствующее значение  $x$ , можно построить границу  $\Gamma$  барьера.

Найдем теперь величину  $Q^*$ . Приравняв к нулю комплексно-сопряженную скорость течения  $dW/dz$ , получим уравнение

$$z^3 + 3Q z^2 + z + Q = 0, \quad (3)$$

которому удовлетворяют координаты трех точек нулевой скорости течения (точка  $N_1$  расположена на оси  $x$ , точки  $N_2$  и  $N_3$  – в потоке симметрично относительно этой оси). При  $Q=Q^*$  точка  $N_2$  лежит на кривой  $\Gamma$ , и системе (2), (3) удовлетворяют координаты  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  точек  $N_1$  и  $N_2$ .

При  $y \neq 0$  эта система сводится к одному трансцендентному уравнению

$$\operatorname{tg} \frac{6y_2 g(y_2)}{3h(y_2) - 4y_2^2 + 1} = \frac{6y_2 g(y_2)}{3h(y_2) - 6y_2^2 + 1}, \quad (4)$$

где  $h(y_2) = [(4y_2^2 - 1) / 3]^{1/2}$ ,  $g(y_2) = [h(y_2) - y_2^2]^{1/2}$ . Наименьший корень уравнения (4)  $y_2 = 0.752$ . Из системы (2), (3) следует также, что  $x_2 = -g(y_2)$ ,  $Q^* = -(3x_2^2 - y_2^2 + 1)/(6x_2)$ . Таким образом, искомый критический расход  $Q^* = 0.395$ .

**Схема 2.** Пусть  $Q < Q^*$ . Тогда между соседними источниками прорываются струи загрязненной жидкости, и прежде единая область течения от источников разделяется ими на три отдельные области. Уравнение границы  $\Gamma_1$  области течения от источника в начале координат имеет вид  $\Psi = \pi Q$ . Это вновь приводит к уравнению (2), которое следует решать в диапазоне  $0 < y < \pi Q$ . Пусть  $\Gamma_2$  – граница области течения от источника с координатами  $0, 1$ , а  $\alpha$  – ширина струи загрязненной жидкости в бесконечно удаленной точке. Тогда на ближайшей к оси  $x$  нижней ветви кривой  $\Gamma_2$   $\Psi = \pi Q + \alpha$ . Таким образом, эта кривая описывается уравнением (2) с заменой в нем под знаком

котангенса величины  $y$  на  $y - \alpha$ . Точка  $N_2$  лежит на кривой  $\Gamma_2$ , следовательно,

$$\alpha = y_2 + Q \left[ \operatorname{arctg} \frac{y_2 (3x_2^2 - y_2^2 + 1)}{x_2 (x_2^2 - 3y_2^2 + 1)} - \pi \right].$$

Для определения координат кривой  $\Gamma_2$  в диапазоне  $y_0 < y < 3\pi Q + \alpha$  следует выделять необходимые корни, причем величину  $y_0$  можно найти из условия, что при  $y=y_0$  два соответствующих значения  $x$  равны между собой. Сказанное выше позволяет построить границы искомых барьеров при произвольном параметре  $Q$ . На рис. 1 изображены границы барьеров 1-3 при значениях  $Q = 0.5, 0.395, 0.3$  соответственно.

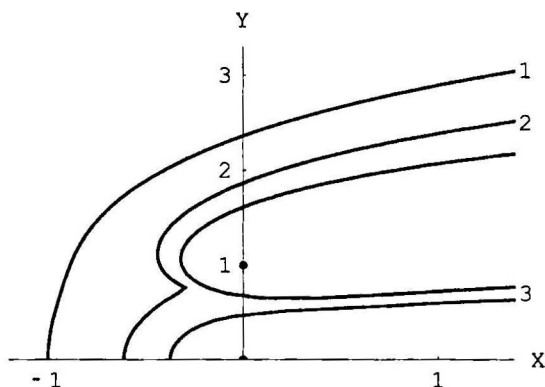


Рис. 1

В случае батареи из  $2n+1$  источников ( $n=2,3,\dots$ ) расхода  $q$ , расположенных аналогично описанному выше, также можно получить явное уравнение границы  $\Gamma$  барьера для потока загрязнений при  $Q=Q^*$  - перед первым прорывом барьера. Для этого сначала с помощью комплексного потенциала течения находится уравнение границы при нефиксированном расходе  $Q$  и уравнение для определения  $2n+1$  точек нулевой скорости (оба - алгебраические степени  $2n+1$ ). Последние при

заданном  $Q$  дают координаты  $x_2, y_2$  точки  $N_2$ . Далее без труда находится значение  $Q < 0.395$ , при котором оба уравнения удовлетворяются. Например, в случае девяти источников  $Q^* = 0.349$ . На рис. 2 изображена граница барьера перед его прорывом.

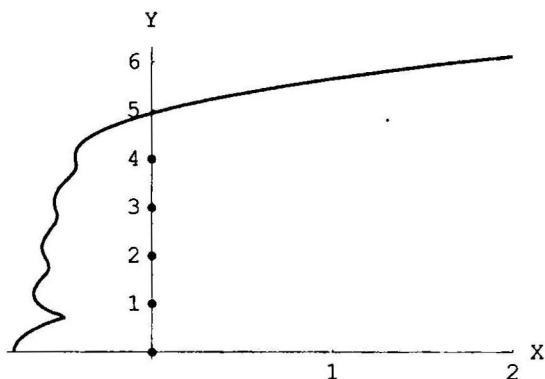


Рис. 2

**Четыре источника в потоке.** Пусть в потоке имеется четыре источника, ориентированные аналогично схеме с тремя источниками, а начало координат совпадает с точкой симметрии системы. Нормируя величину  $z$  на  $L/2$ , а  $W$  - на  $vL/2$ , и сохраняя смысл величины  $Q$ , получим комплексный потенциал течения

$$W = -z - 2Q \ln[(z^2 + 1)(z^2 + 9)].$$

Уравнение  $dW/dz = 0$  при достаточно больших значениях  $Q$  имеет два вещественных корня, которые соответствуют двум точкам нулевой скорости  $N_1$  и  $N_2$  на оси  $x$ . При  $Q = Q_1^* = 0.412$  эти точки сливаются, так что  $Q_1^*$  соответствует критическому расходу перед первым прорывом барьера загрязнениями. Уравнение границы барьера  $\Gamma$  имеет вид  $\Psi = 8\pi Q$ . Ему соответствует алгебраическое уравнение четвертой степени относительно абсциссы  $x$  при заданной ординате  $y$ . Можно убедиться, что точка нулевой скорости  $N_3$  находится при этом внутри области течения от источников, ограниченной кривой  $\Gamma$ . При  $Q < Q_1^*$  возникает струйка загрязненной жидкости, разделяющая область потока от источников на два, точки  $N_1$  и  $N_2$  симметрично отходят от

оси  $x$ . Перед вторым прорывом при  $Q_2^* < Q_1^*$  координаты  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  точек  $N_1$  и  $N_3$  удовлетворяют уравнению кривой  $\Gamma$ . Используя эти условия и уравнение  $dW/dz = 0$ , найдем, что  $Q_2^* = 0.363$ . На рис. 3 изображены границы барьера перед его первым и вторым прорывами.

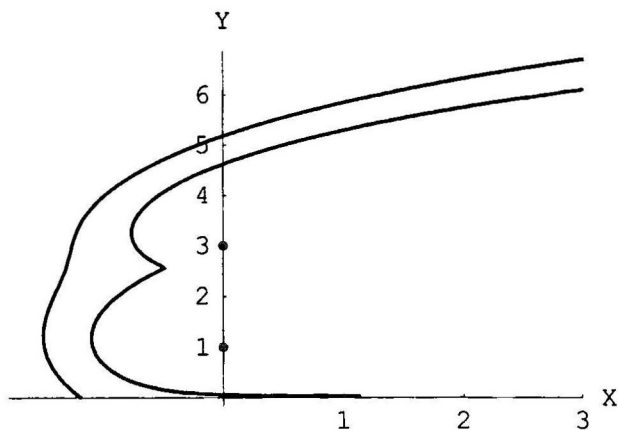


Рис. 3

Аналогичным образом величину  $Q_1^*$  можно найти и для батареи  $2n$  источников ( $n=3,4,\dots$ ). Следует отметить, что при  $n \rightarrow \infty$  критический расход стремится к значению  $Q^* = 1/\pi$ .

**Галерея в потоке.** Пусть в потоке загрязненных вод перпендикулярно его направлению находится прямолинейная галерея длиной  $L$  с расходом  $q$ . Давление на ней постоянно, а ее центр совпадает с началом координат. Найдем положение границы  $\Gamma$ , разделяющей область течения от галереи и набегающий поток. Комплексный потенциал течения имеет вид

$$W(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left( z + \sqrt{z^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right) - vz.$$

Уравнение границы  $\Gamma$  удобно представить в форме ( $z$  нормировано на  $L/2$ ,  $Q=q/(\pi vL)$ )

$$\operatorname{Im}[(Q/i) \arcsin(iz)] + y = \pi Q.$$

Отсюда вытекает явная зависимость абсциссы границы  $\Gamma$  от ее ординаты

$$x = -\cos(y/Q) [y^2 \sin^2(y/Q) - 1]^{1/2}. \quad (5)$$

В частном случае  $L=0$  уравнение (5) сводится к известному уравнению границы  $\Gamma$  для задачи об источнике в потоке (см., например, [5]). Абсцисса точки  $N$  нулевой скорости течения  $x_0 = -(Q^2 - 1)^{1/2}$ . Таким образом,  $Q \geq 1$ . Из (5) следует, что при  $Q=(3/2)^{1/2}$  точка  $N$  становится точкой перегиба кривой  $\Gamma$ , при  $Q=1$   $x_0=0$ , и граница  $\Gamma$  достигает галереи, причем касательная к этой границе в точке  $N$  составляет с осью  $y$  угол, равный  $\pi/6$ . Граница  $\Gamma$  пересекает ось  $y$  в точке  $y=\pi Q/2$  и имеет асимптоту  $y=\pi Q$ . Кривые 1-5, изображенные на рис. 4, показывают положение границы  $\Gamma$  при значениях  $Q=2, 1.5, (3/2)^{1/2}, 1.05, 1$  соответственно.

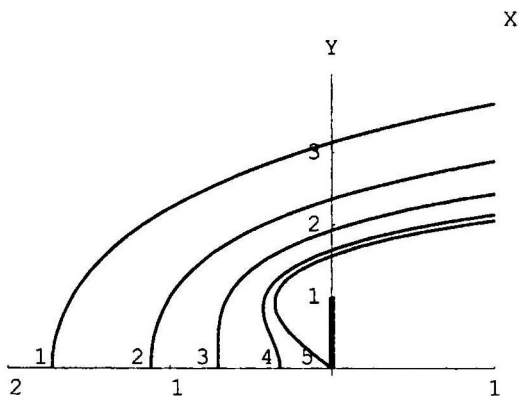


Рис. 4

При  $Q < 1$  барьер, создаваемый галереей, прорывается потоком загрязнений, и данная схема течения перестает работать.

**Две галереи в потоке.** Пусть в потоке симметрично оси  $x$  находятся две прямолинейные галереи с одинаковым безразмерным расходом  $Q$  (схема течения ясна из рис. 5), где изображена верхняя половина течения). Расстояние от начала координат до галереи равно

а ( $a < 1$ ). Задача определения положения границы  $\Gamma$  барьера в данном случае также допускает полное аналитическое исследование вплоть до касания границей  $\Gamma$  галереи. В частности, показано, что ордината точки касания равна  $a^{1/2}$ . На рис. 5 изображены искомые границы в случае  $a=0.5$ . Кривые 1-4 отвечают значениям  $Q=2, 1.5, 1, 0.5$ .

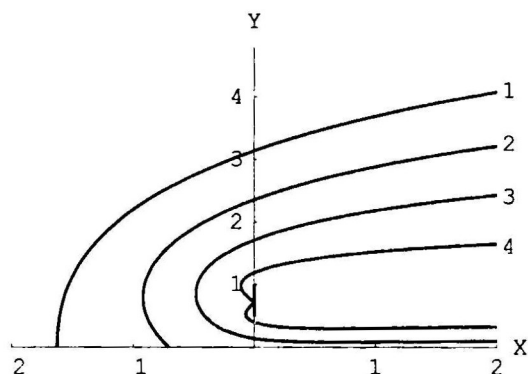


Рис.5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Javandel I., Tsang C.F. *Capture-zone type curves: a tool for aquifer cleanup*// Ground Water.-1986.-V.24.-N. 5.-P.616-625.
2. Strack O.D.L. *Groundwater Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ,1989.-P.227-240.
3. Bakker M., Strack O.L.D. *Capture zone delineation in two-dimensional groundwater flow models*// Water Resources Research.-1996.-V.32.-N.5.- P.1309-1315.
4. Christ J.A., Goltz M.N., Huang J. *Development and application of analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies*// J. of Contaminant Hydrology.-1999.-V.37.-P.295-317.
5. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. *Физико-математические основы фильтрации воды*. - М.: Мир, 1971.